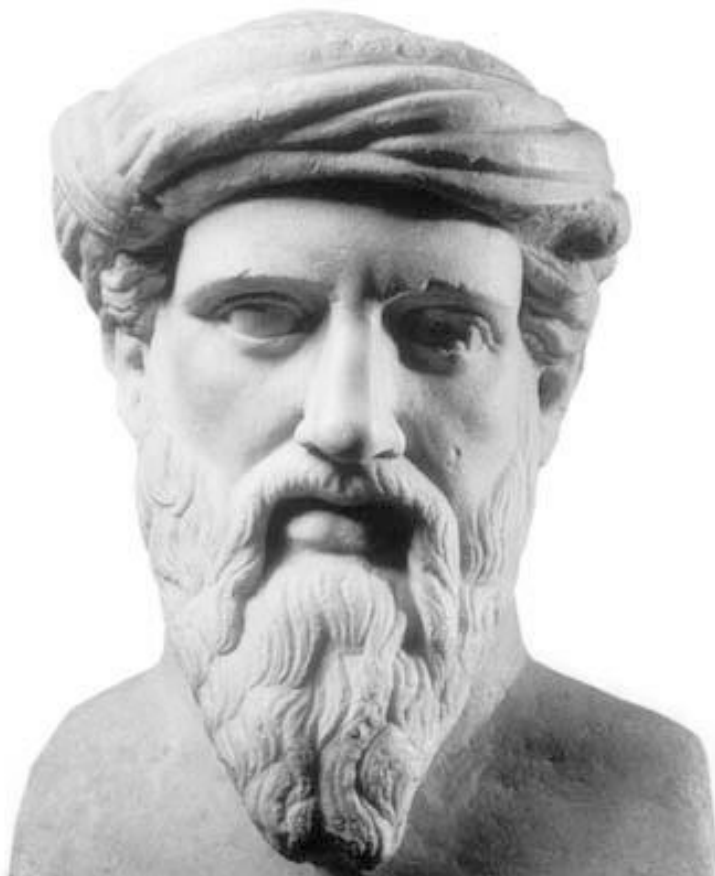


10 Beweise des Satzes von Pythagoras

Selbstständige Arbeit im Rahmen der Vorlesung:
Mathematik für die Sekundarstufe, HS08
Studiengang Sekundarstufe I
Fachhochschule Nordwestschweiz
Pädagogische Hochschule



Eingereicht von:
Adrian Christen

Eingereicht am: 16. Dez. 2008
Hans Walser
Mathematisches Institut
Rheinsprung 21
4051 Basel

Inhalt

1	Zielsetzung	3
2	Vorgänger zu Pythagoras' Satz	
2.1	Babylon	4
2.2	Ägypten	5
2.3	China	6
2.4	Megalytische Steinringe	7
3	Pythagoras – eine Kurzbiographie	9
4	10 Beweise des Satzes von Pythagoras	
4.1.	Klassischer Pythagoras Beweis mit rechtwinkligem Dreieck 3:4:5	11
4.2.	Schaukelrad-Beweis nach Perigal (1801-1898):	12
4.2.1	Analogien zu den Flächensätzen	13
4.3.	geometrischer Beweis über Flächen:	14
4.4.	Beweis nach Leonardo da Vinci	16
4.5.	Höhensatz nach Euklid:	17
4.6.	Kathetensatz nach Euklid (algebraisch):	18
4.7.	Scheren und Drehen	20
4.8.	Beweis nach James Abram Garfield	22
4.9.	Beweis nach Albert Einstein	23
4.10.	Pythagoras mit Kreisberechnungen	24
5	Abschliessender Kommentar zu 'Pythagoras im Schulunterricht'	26
	Bibliographie	27

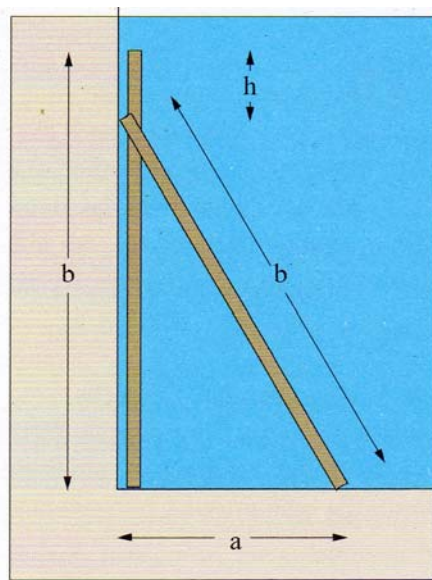
1 Zielsetzung

Diese Arbeit setzt sich einerseits zum Ziel, einen kurzen historischen Überblick über den Satz von Pythagoras und dessen Vordenker zu geben; andererseits 10 Beweise des pythagoräischen Satzes aufzuführen, welche besonders für den Schulunterricht auf der Sekundarstufe I geeignet sind. Eine genauere Beschreibung, auf welche Art und Weise die Beweise methodisch im Unterricht verwendet werden, ist jedoch nicht Inhalt und Zweck dieser Arbeit, diese beschränkt sich auf die Präsentation der ausgewählten 10 Beweise.

2 Vorgänger zu Pythagoras' Satz

2.1. Babylon

Die älteste Quelle, die auf den Lehrsatz des Pythagoras hinweist, findet sich im babylonischen Text BM85196 und stammt aus der Zeit des Hammurapi, ca. 1700 v.Chr.¹ Es handelt sich dabei vermutlich um einen Balken, der an eine Wand gelegt wurde, abrutschte und somit ein rechtwinkliges Dreieck bildete:



Figur 1: Illustration zur Aufgabe im babylonischen Text BM 85196

Obwohl sich in keinem der babylonischen Texte ein mathematischer Beweis für die geometrische Gesetzmässigkeit im rechtwinkligen Dreieck finden lässt – dies verwundert nicht, da die Idee, eine mathematische Theorie auch zu beweisen, sich erst bei den Griechen überhaupt langsam entwickelte – wird dennoch im Text explizit die Kathete a als die Wurzel von $b^2 - (b-h)^2$ definiert, somit war der Gedanke der pythagoräischen Flächenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck also schon über tausend Jahre vor Pythagoras' Zeit bekannt.

¹ Im Folgenden beziehe ich mich auf: Alfred Hoehn und Martin Huber: Pythagoras –
Erinnern sie sich? Orell Füssli Verlag AG, Zürich 2005, S. 16ff.

Ein weiterer babylonischer Text, Plimpton 322, besteht aus einer Tabelle, die eine Vielzahl an pythagoräischen Zahlentripeln (a , b , c ,) enthält, für welche die Gleichung $a^2+b^2=c^2$ stimmt:



Unklar ist, ob die Formel zur Erzeugung der pythagoräischen Tripel ($a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$) ebenfalls schon bekannt war, dies lässt sich nur mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, jedoch nicht beweisen.

2.2. Ägypten

Die Wissenschaft ist sich im Bezug auf die ägyptischen Funde, welche auf den Satz des Pythagoras hinweisen – oder eben auch nicht - nicht ganz einig. Der berühmteste Fund, der Papyrus Rhind (nach 1800 v.Chr.) enthielt angeblich keine Hinweise auf die Bekanntheit des Satzes von Pythagoras, wie dies beispielsweise Eli Maor behauptet². Im Gegenzug dazu weisen Hoehn und Huber allerdings auf Aufgabe 56 im Dokument

² Maor, Eli: The Pythagorean Theorem – A 4,000-Year History. Princeton University Press, Princeton & Oxford, 2007, S.13ff.

hin³, in welcher ein Profildreieck beschrieben wird. Mit dem Wissen über die Kennzeichnung der Profildreiecke durch den Rücksprung auf die Höhe einer Elle (ca. 52,35cm) kann das angegebene Profildreieck als ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Seitenverhältnis 3:4:5, als ein pythagoräisches oder auch ägyptisches Dreieck definiert werden.

Im Berliner Papyrus (ca. 1900 v.Chr.) sind zwei weitere Zahlentripel (6,8,10 od. 12,16,20) gefunden worden, jedoch keine anderen. Es ist daher anzunehmen, dass das pythagoräische Theorem den Ägyptern nicht bekannt war, wenngleich gewisse Zusammenhänge zwischen den ägyptischen Dreiecken und ihrer Rechtwinkligkeit bestanden. Hauptgrund hierfür könnte sein, dass der rechte Winkel bei Pyramidenbauten also ohnehin selbstverständlich galt, Abweichungen vom rechten Winkel waren äusserst klein (beispielsweise bei den Pyramiden von Giseh). Das mehrfache Auftreten der ägyptischen Pyramidendreiecke mit dem Seitenverhältnis 3:4:5 lässt mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit darauf schliessen, dass die ägyptischen Harpedonapten (Seilspanner) diese Dreiecke für architektonische Zwecke gebraucht haben. Ob die Ägypter allerdings auch einen Seilring mit 12 gleich grossen Teilstücken und Knoten und in diesem Zusammenhang das rechtwinklige Dreieck ebenfalls gekannt haben, ist derzeit nicht erwiesen. Es verhielt sich bei den Ägyptern gleich wie bei den Babyloniern, es war nicht üblich, Texte als Beweise mathematischer Theoreme auszulegen, sondern lediglich als Aufgabensammlung.

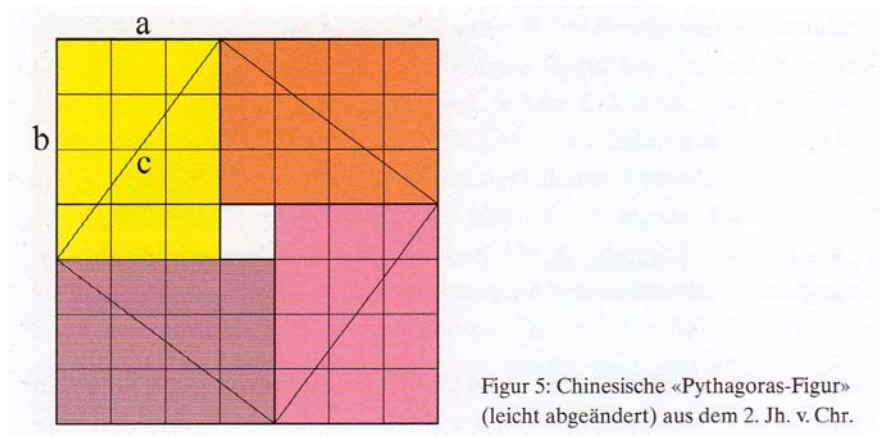
2.3. China

In seinem Buch *Mathematik in Antike und Orient* zeigt Gericke⁴ eine Figur aus China, die sehr wahrscheinlich aus dem 2. Jh. v. Chr. stammt, möglicherweise jedoch auch

³ Alfred Hoeh und Martin Huber S. 18-20

⁴ Gericke, H., *Mathematik in Antike und Orient*, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 1984.

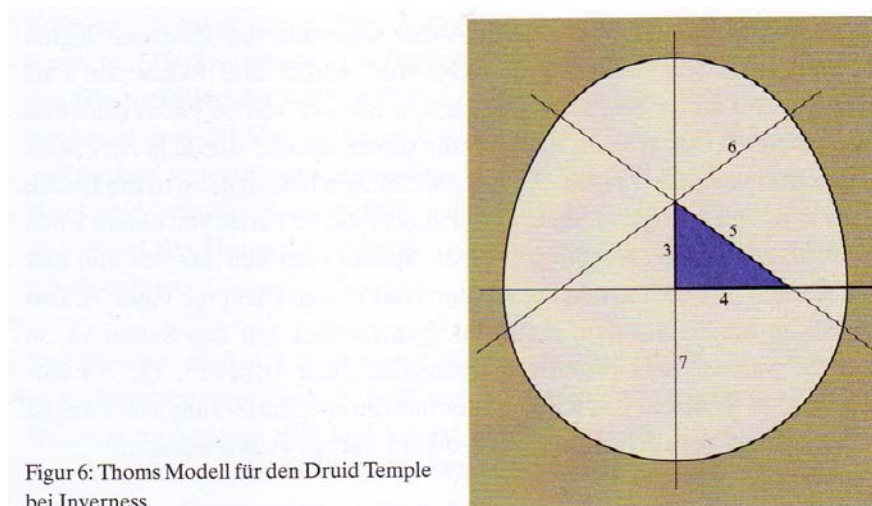
aus dem 12. Jh. v. Chr. Es handelt sich dabei um ein grosses Quadrat, welches wiederum in sieben mal sieben kleinere Quadrate unterteilt wurde. Innerhalb der gesamten Figur sind 4 Rechtecke, bestehend aus je drei mal vier Quadrate, hervorgehoben, es bleibt ein Quadrat in der Mitte übrig:



Die Figur enthält also den Beweis für Pythagoras' Satz $a^2 + b^2 = c^2$.

2.4. Megalithische Steinringe

Im Jahre 1967 wurden verschiedene Grundrissaufnahmen megalithischer Steinringe vom Ingenieur Alexander Thom veröffentlicht. Es wird vermutet, dass diese darauf schliessen, dass das ägyptische Dreieck gut 200 Jahre vor Hammurapi schon bekannt war. Betrachtet man Thoms Modell des präzise nachgebauten Steinrings, lässt sich erkennen, dass dessen Erbauer das ägyptische Dreieck (mit Seitenlängen 3, 4 und 5) als Konstruktionsgrundlage brauchten:



Insgesamt wurden von Thom schätzungsweise 600 megalithische Anlagen vermessen, von welchen noch lange nicht alle analysiert wurden. Interessant erscheint jedoch die Tatsache, dass die Steinringe um ca. 2000 v. Chr. erstellt wurden. Es verhält sich allerdings wieder gleich wie bei den ägyptischen Dreiecken: Es gibt keinen direkten Zusammenhang zwischen den megalithischen Steinringen und dem Satz des Pythagoras, wenngleich die Steinringe ein grosses Mass an geometrischer Kenntnis zu sehr früher Zeit vorweisen. Weitere Forschung an den Steinringen könnte in diesem Sinne noch sehr viel neue, interessante Kenntnisse hervorbringen. Von insgesamt über 600 durch A. Thom vermessenen megalithischen Anlagen sind noch längst nicht alle vermessen und ausgewertet worden.

3 Pythagoras – eine Kurzbiographie

Die Quellenlage zur Person des Pythagoras ist äusserst kritisch zu betrachten. Eine Vielzahl an Legenden über Pythagoras entstanden über Jahrhunderte, nur wenige der Quellen können daher als wirklich gesichert und vertrauenswürdig angesehen werden. Hauptsächlich umstritten sind Informationen über Pythagoras' genaues Geburts- und Sterbejahr, der exakte Verlauf seiner langjährigen Reisen und die genauen Umstände seines Todes. Die meisten Pythagorasbiographien zusammen ergeben jedoch vereinzelte Gemeinsamkeiten, die als relativ gesichert betrachtet werden können:

Pythagoras wuchs in der ersten Hälfte des 6. Jahrhunderts v. Chr. in Samos auf. In jungen Jahren machte er sich auf Reisen nach Phönizien, Ägypten und Babylon, um dort höchstwahrscheinlich religiöse und naturwissenschaftliche Studien zu betreiben. Bei seiner Rückkehr nach Samos regierte dort Polykrates (den meisten wohl aus Schillers *Der Ring des Polykrates* bekannt). Pythagoras, der in Opposition zu Polykrates stand, wanderte um das Jahr 530 nach Süditalien (damaliges Grossgriechenland) aus.

In Kroton wurde ihm angeboten, die Jugend zu unterrichten. Er gründete daher eine Schule, mehr zu vergleichen mit einer Bruderschaft, oftmals auch kritisch als Sekte betitelt. Dessen Mitglieder lebten nach strengen Regeln (bescheidene, disziplinierte Lebensweise) und verpflichteten sich der Treue gegenüber ihrem Lehrmeister Pythagoras. Die Mathematik spielte eine grosse Rolle in Pythagoras' Lehren, "alles ist Zahl", so das Credo der Gemeinschaft, Gott habe den Kosmos nach Zahlen geordnet. Das Erkennungszeichen ihrer Vereinigung war das Pentagramm. Ironischerweise war gerade das Pentagramm die Figur, an der später die Irrationalität entdeckt wurde und somit die Grundlagen der Pythagoräischen Weltanschauung zerstört wurden.

Da es sich bei der Bruderschaft immer mehr auch um eine politische Vereinigung handelte, denn Pythagoras gewann durch seine Reden und durch seine Weisheit immer mehr Ansehen und Einfluss, wuchs in demokratischen Kreisen auch der Widerstand

gegen den pythagoräischen 'Geheimbund'. Gewisse Quellen sprechen davon, dass in der Folge das Hauptquartier der Bruderschaft angezündet wurde und nur wenige flüchten konnten, darunter auch Pythagoras; jedoch ist dies nicht unumstritten.

Die Angaben über sein Lebensalter schwanken, je nach Quelle, zwischen 75 bis zu 115 Jahren.

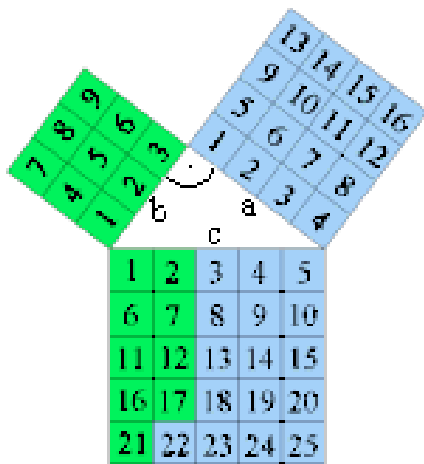
4 10 Beweise des Satzes von Pythagoras

Vorbemerkung

Es gibt heute mehrere hundert Beweise für den Satz des Pythagoras. Da die Beschränkung auf lediglich 10 Beweise einen äusserst kleinen Teil der Möglichkeiten, den Satz des Pythagoras in den Schulunterricht einzubauen, darstellt, muss darauf hingewiesen werden, dass das Thema Pythagoras ein sehr umfangreiches und vielseitiges ist. Von mathematik-kulturgeschichtlichem Wissen über die Geschichte verschiedener Völker und ihres mathematischen Wissensstandes, über die verschiedenen notwendigen mathematischen Kenntnisse für die einzelnen Beweise des Pythagoras, zu biographischem Wissen über berühmte Mathematiker und deren Umgang mit dem pythagoräischen Theorem (dies über eine Zeitspanne von mehreren Jahrtausenden), lässt das Thema "Pythagoras" im Schulunterricht zu einem sehr breiten Spektrum werden. Die folgenden 10 Beweise sollen daher nur ansatzweise andeuten, was alles im Schulunterricht möglich sein könnte und wie sich verschiedene Beweise im Schulunterricht anwenden liessen, um den Schülern die Wichtigkeit und die Breite des Feldes der Mathematik zu vermitteln.

4.1. Klassischer Pythagoras Beweis mit rechtwinkligem Dreieck 3:4:5

Über den Katheten werden Quadrate errichtet und deren Flächeninhalte mit dem Flächeninhalt des Hypothenusenquadrates verglichen. Im Seitenverhältnis des ägyptischen Dreiecks (3:4:5) besteht also a^2 aus 16 Quadraten, b^2 aus 9 und c^2 aus 25, somit ist $a^2 + b^2 = c^2$.



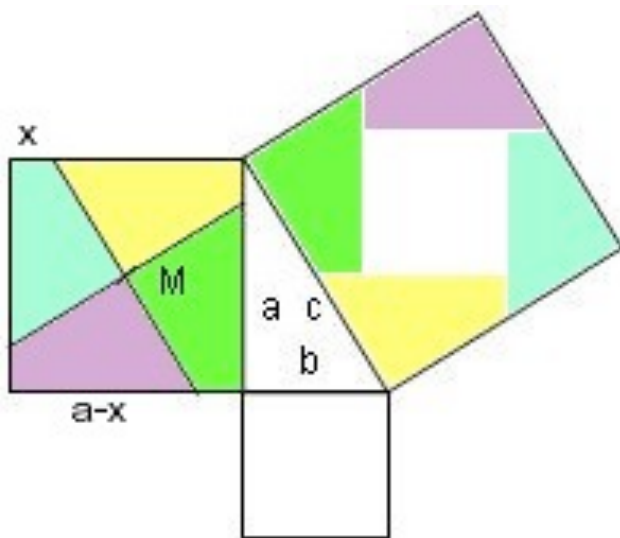
Dieser Beweis ist der wohl grundsätzlichsste der Flächenbeweise, vor allem die Nummerierung der einzelnen Quadrate macht im rechtwinkligen Dreieck des Seitenverhältnisses 3:4:5 sehr schnell klar, wie man im rechtwinkligen Dreieck auf die pythagoräische Formel $a^2 + b^2 = c^2$ kommt. Der nächste Flächenbeweis geht ähnlich vor, unterteilt allerdings die Kathetenquadrate und das Hypotenusenquadrat differenziert.

4.2. Schaufelrad-Beweis nach Perigal (1801-1898):

Der Beweis nach Perigal scheint unter den vielen Flächen-Zerlegungs-Beweisen sehr einleuchtend zu sein, da die Kathetenquadrate und das Hypothenusen Quadrat die übliche 'Pythagoras-Figur' bilden.

Wird die Seite c parallel nach links verschoben bis sie den Mittelpunkt trifft und gleichzeitig die Senkrechte der Seite c parallel verschoben bis sie sich auch auf dem Mittelpunkt befindet, entstehen vier kongruente Vierecke innerhalb des a-Katheten-Quadrates. Diese können nun parallel verschoben werden (ohne Drehung) und bilden so (zusammen mit dem Quadrat aus b) das Quadrat der Hypothenuse. Der Beweis nach Perigal ist rein graphisch sehr attraktiv, es scheint selbstevident, dass

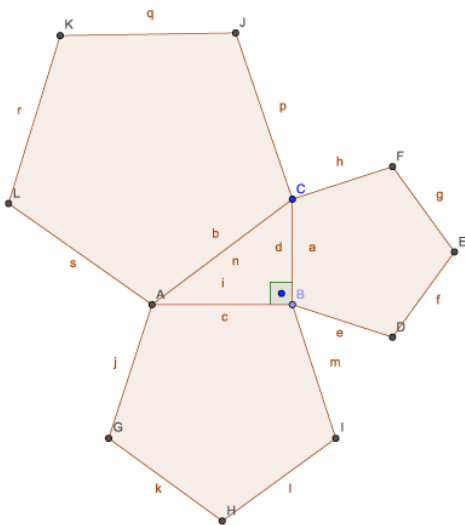
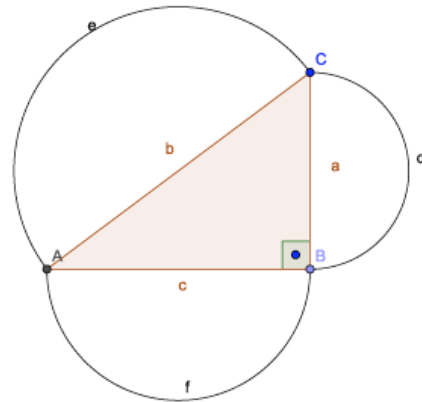
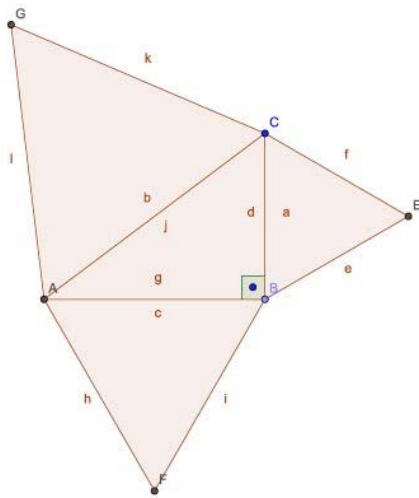
$$c^2 = a^2 + b^2.$$



4.2.1 Analogien zu den Flächensätzen

Die grundsätzliche Tatsache, dass die quadratische Fläche über den beiden Katheten gleich zu setzen ist mit der quadratischen Fläche über der Hypothese, lässt eine riesige Vielfalt an Beweisen zu, die hier nur partiell angedeutet wurden. Pythagoras selbst experimentierte – noch bevor er zu seiner ursprünglichen Form, nämlich dem Dreieck mit den drei Quadraten über der Hypotenuse und den Katheten, kam – mit gleichschenkligen Dreiecken über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, deren Flächen folglich die Hälfte der Fläche der Quadrate betrug.

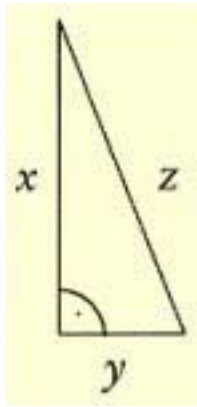
Es sind also sehr viel mehr Formen oder geometrische Konstruktionen über den Seiten des pythagoräischen Dreiecks möglich als die üblicherweise verwendeten Quadrate, so lange diese nur ähnlich zueinander sind. So wäre es beispielsweise auch möglich, Halbkreise, gleichschenklige Dreiecke, die Sehnenabschnitte eines Kreises, mehreckige Konstruktionen, oder weitere ähnliche Figuren über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks zu zeichnen und deren Flächenverhältnisse nach Pythagoras zu beweisen:



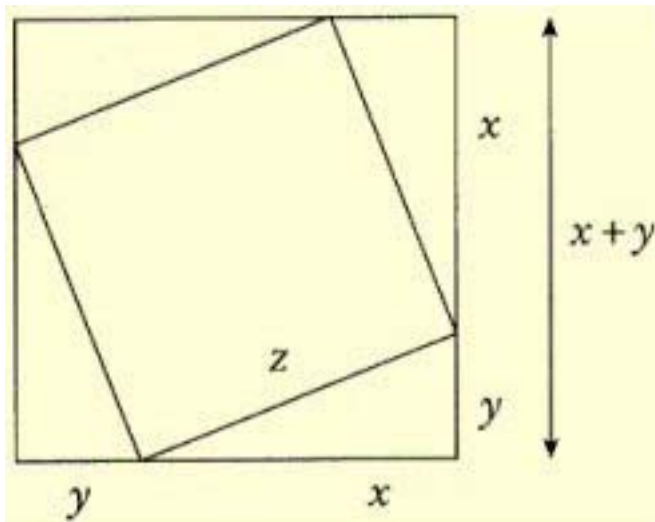
Auch der nächste Beweis nutzt Flächen, um den Satz des Pythagorass zu beweisen, jedoch handelt es sich dabei eher um einen algebraisch-geometrischen Beweis.

4.3. Geometrischer Beweis über Flächen:

Das Ziel des geometrischen Beweises ist es, aufzuzeigen, dass der Satz des Pythagoras allgemeingültig für alle rechtwinkligen Dreiecke gilt, unabhängig von deren Seitenlängen, daher sind die Seitenlängen bei diesem Beweis als x , y und z angegeben:



Das rechtwinklige Dreieck wird nun vervierfacht und zusammen mit einem inneren Quadrat zu einem grossen Quadrat zusammengesetzt:



Die Fläche des grossen Quadrates kann nun auf 2 verschiedene Arten berechnet werden:

1. Methode: Fläche des grossen Quadrates mit Seitenlänge $x+y$, also:

$$\text{Fläche} = (x + y)^2.$$

2. Methode: Jedes Element des grossen Quadrates wird separat addiert: $4(\frac{1}{2} xy) + z^2$

Da beide Methoden das gleiche grosse Quadrat definieren, können also die Resultate der Methoden 1 und 2 gleichgesetzt werden:

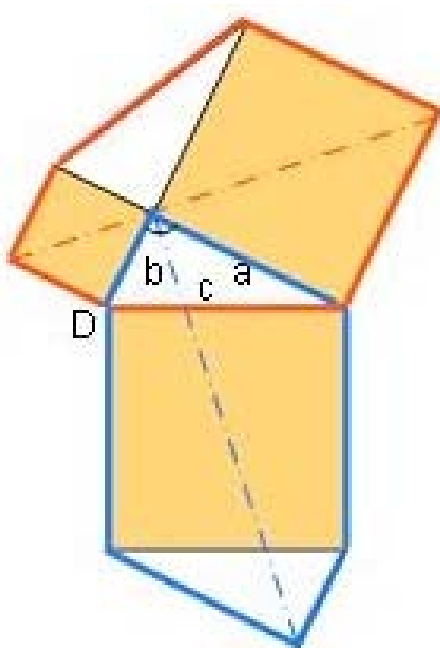
$$(x + y)^2 = 4(\frac{1}{2} xy) + z^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2xy + z^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

4.4. Beweis nach Leonardo da Vinci

Die Quadrate der Hypotenuse und der Katheten bilden die übliche Pythagoras Figur. Ergänzt wird sie allerdings durch zwei weitere rechtwinklige Dreiecke, die zum ursprünglichen kongruent sind. Aus der gesamten Form werden nun zwei Sechsecke (blau und rot) hervorgehoben, die je durch Halbierung (Strichpunkte) in zwei flächengleiche Vierecke geteilt werden. Bei genauer Betrachtung lässt sich erkennen, dass die nun entstandenen roten und blauen Vierecke kongruent sind:



Wird von der Fläche des roten Sechseckes die Fläche der zwei kongruenten Dreiecke subtrahiert, dann bleibt die Fläche der Kathetenquadrate übrig. Wird das beim blauen Sechseck gemacht, bleibt die Fläche des Hypotenusenquadrates übrig. Gehen wir vom ägyptischen Quadrat mit $a = 4$, $b = 3$ und $c = 5$ aus:

Fläche rot: $b^2 + a^2 + ab = 9 + 16 + 12 = 37$

Fläche blau: $c^2 + ab = 25 + 12 = 37$

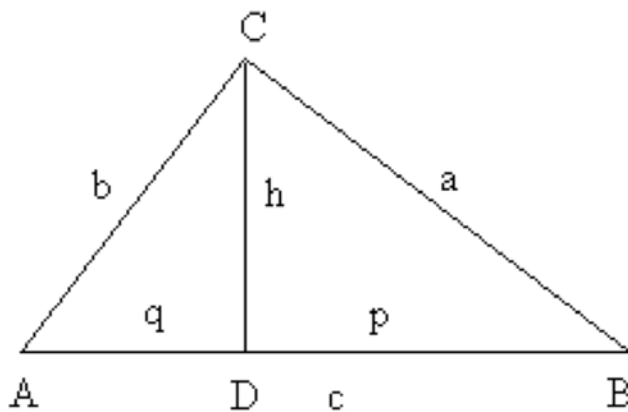
Da die rote und die blaue Fläche also gleichwertig sind, sind die beiden Kathetenflächen ebenfalls mit der Hypotenusenfläche gleichzusetzen, also:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Leonardo da Vincis Beweis scheint auf den ersten Blick nicht evident zu sein, die Flächengleichheit lässt sich nicht sofort erkennen wie beim Beweis nach Perigal. Allerdings ist der Vorteil dieses Beweises, gerade auch für SchülerInnen, dass er nur die absoluten Grundkenntnisse der Flächenberechnung von Quadraten und rechtwinkligen Dreiecken erfordert. Zudem genügen die Angaben über die Länge von a, b und c um den Beweis sehr schnell herzuleiten.

4.5. Höhensatz nach Euklid:

Da es sich im rechtwinkligen Dreieck um zwei rechtwinklige Teildreiecke ADC und BDC handelt, gelangt man durch den Satz des Pythagoras zu den folgenden Gleichungen:



I $b^2 = q^2 + h^2$

II $a^2 = p^2 + h^2$

Durch Addition von I und II erhält man also:

$$\text{III} \quad a^2 + b^2 = p^2 + q^2 + 2h^2$$

Mit der Umformung von c zu p+q erhalten wir:

$$\text{IV} \quad a^2 + b^2 = c^2 = (p+q)^2$$

Durch Gleichsetzung von III und IV kommt man schliesslich zum Höhensatz:

$$p^2 + q^2 + 2h^2 = (p+q)^2$$

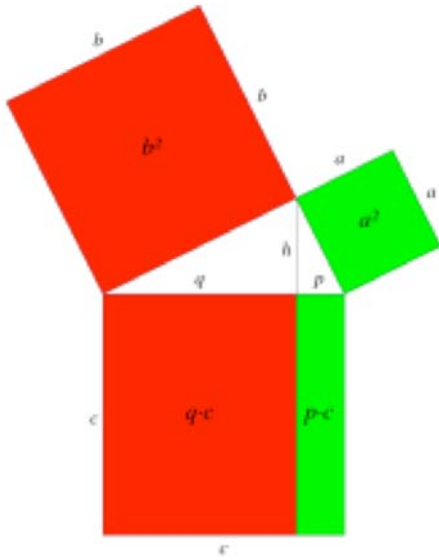
$$p^2 + q^2 + 2h^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

$$2h^2 = 2pq$$

$$\mathbf{h^2 = pq}$$

4.6. Kathetensatz nach Euklid (algebraisch):

Der Kathetensatz kann auf verschiedene Arten bewiesen werden. Bevor die ursprüngliche Methode Euklids analysiert wird, scheint zuerst die algebraische Methode angebracht. Der Kathetensatz besagt, dass die beiden durch die Höhe unterteilten Rechtecke der Hypotenusenabschnitte die gleiche Fläche aufweisen, wie die Katetenquadrate:



Nach Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= c^2 - b^2 \\
 &= (p+q)^2 - (q^2 + h^2) \\
 &= p^2 + 2pq + q^2 - q^2 - a^2 + p^2 \\
 &= 2p^2 + 2pq - a^2
 \end{aligned}$$

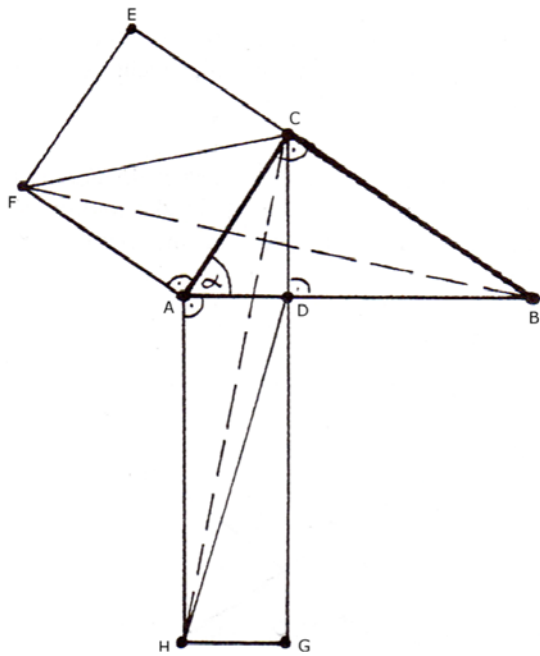
Daher ist:

$$2a^2 = 2p(p+q) = 2pc$$

$$\mathbf{a^2 = pc}$$

Um den analogen Fall, also $b^2 = qc$ zu beweisen, wird nun die Methode Euklids angewandt. Es handelt sich dabei um den ältesten Beweis des Kathetensatzes, der sowohl den Griechen als auch den Engländern und Chinesen⁵ schon bekannt war:

⁵ Fraedrich, A.M., Die Satzgruppe des Pythagoras, in: Knocke und Scheid (Hg.): Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 29. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim Leipzig Wien Zürich, 1994. [S. 20]



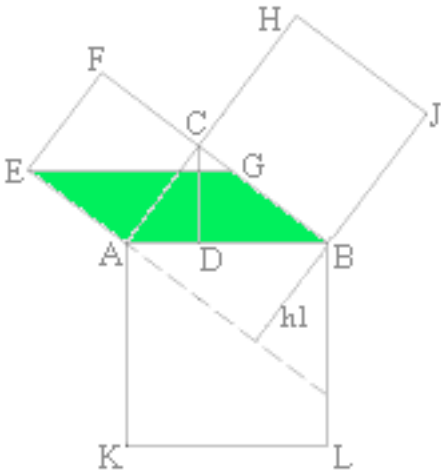
Da $BC \parallel AF$ haben die beiden Dreiecke AFC und AFB die gleiche Fläche. Dasselbe gilt für $CD \parallel AH$ also sind auch die beiden Dreiecke AHD und AHC flächengleich. Für die beiden Dreiecke ABF und AHC gilt nun also:

- I $|AB| = |AH|$ (Hypotenuse c)
- II $|AF| = |AC|$ (Kathete b)
- III $\omega BAF = \omega HAC$ ($90^\circ + \alpha$)

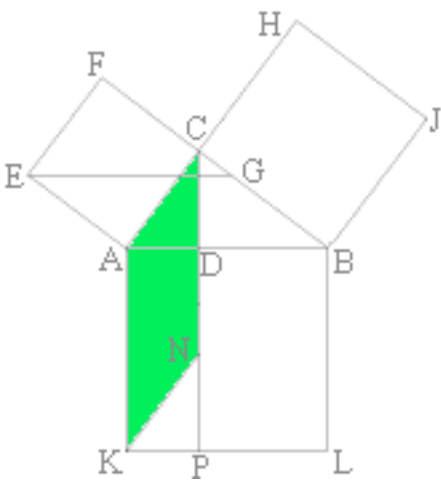
Durch den Kongruenzsatz SWS sind nun ABF und AHC flächengleich. Es folgt daraus, dass auch die Dreiecke ACF und AHD denselben Flächeninhalt haben. Also ist **$b^2 = qc$**

4.7. Scheren und Drehen

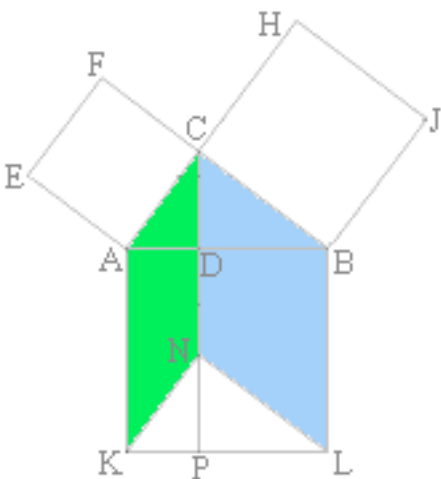
Dem Kathetensatz des Euklid sehr ähnlich ist die Variante des Scheren und Drehens der Kathetenquadrate im rechtwinkligen Dreieck:



Da die beiden Vierecke RACF und EABG die Grundlinie EH und die Höhe gemeinsam haben, sind sie also flächengleich.



Durch Drehung des Parallelograms EABG auf die Position KNCA erscheint nun dieselbe Figur an anderer Position, EABG ist also wiederum gleichzusetzen mit KNCA, da $EA = AC$ und $AB = AK$



Schliesslich ist auch $AKNC = AKPD$, da sowohl die Grundlinie AK wie auch die Höhe KP identisch sind.

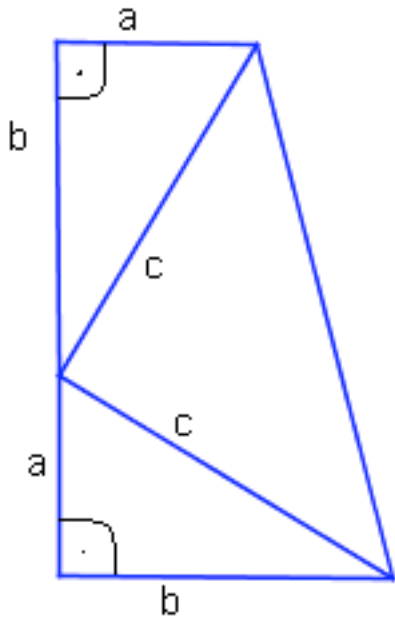
Es ist also das Quadrat EACF und AKPD gleichzusetzen, somit ist im rechtwinkligen Dreieck $b^2 = pc$

Derselbe Vorgang liesse sich auch für das zweite Kathetenquadrat durchführen, also ist auch $a^2 = qc$.

4.8. Beweis nach James Abram Garfield

Dieser Beweis stammt vom späteren 20. amerikanischen Präsidenten Garfield (1831-1881). Er schloss sein Studium 1856 am Williams College in Massachusetts ab und war in Ohio als Mathematik-Lehrer tätig. Einige Jahre danach wurde er Mitglied des Senats. Während des amerikanischen Bürgerkrieges stieg er schnell zum General auf und wurde 1863 für die Republikaner in den Senat gewählt. Am 4. März 1869 nahm er das Amt des Präsidenten an. Garfield wurde jedoch am 2. Juli 1881 im Bahnhof von Washington angeschossen und starb schließlich am 19. September 1881.

Zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke werden so aufeinander gelegt, dass ihre beiden unterschiedlichen Katheten auf einer Geraden liegen. Die vorliegende Figur wird nun durch Verbindung der beiden Ecken der Dreiecke zu einem Trapez ergänzt:



Der Beweis besteht darin, die Fläche des Trapezes auf zwei unterschiedliche Arten zu berechnen. Einerseits mit der Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes für Trapeze, andererseits durch die Addition der Flächen der drei rechtwinkligen Dreiecke. Somit erhalten wir:

$$A_{Tr} = (a+b) / 2 (a+b) = 1/2 (a^2 + b^2 + 2ab)$$

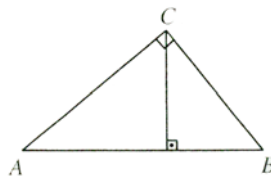
$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

$$A_{Tr} = A_{\triangle 1} + A_{\triangle 2} + A_{\triangle 3} = (ab)/2 + c^2/2 + (ab)/2$$

4.9. Beweis nach Albert Einstein

Albert Einstein entwickelte schon mit 11 Jahren eine Abneigung gegen die Beweise des Satzes von Pythagoras. Er empfand sie als unnötig kompliziert, er störte sich vor allem an den vielen Hilfslinien. Sein Beweis kommt daher im Vergleich zu vielen anderen mit einer einzigen Hilfslinie, nämlich der Höhe im rechtwinkligen Dreieck, aus.

Im Gegensatz zu anderen Beweisen argumentiert Einstein mit den Flächenverhältnissen:



Das Verhältnis der Flächeninhalte zweier ähnlicher Vielecke ist gleich dem Quadrat des Verhältnisses entsprechender Längen in den Vielecken.

Somit kommt er zu folgendem Beweis (die Fläche wird mit E (=Ebene) bezeichnet, der Index mit der Hypotenuse des jeweils betrachteten rechtwinkligen Dreiecks):

$$E_a / E_b = (a/b)^2 = a^2/b^2$$

$$E_a/E_c = (a/c)^2 = a^2/c^2$$

$$E_b/E_c = (b/c)^2 = b^2/c^2$$

Für die einzelnen Flächen gilt nun mit einer Konstanten $m \neq 0$:

$$E_a = ma^2, E_b = mb^2, E_c = mc^2$$

Ferner lässt sich in der obigen Figur erkennen:

$$E_a + E_b = E_c$$

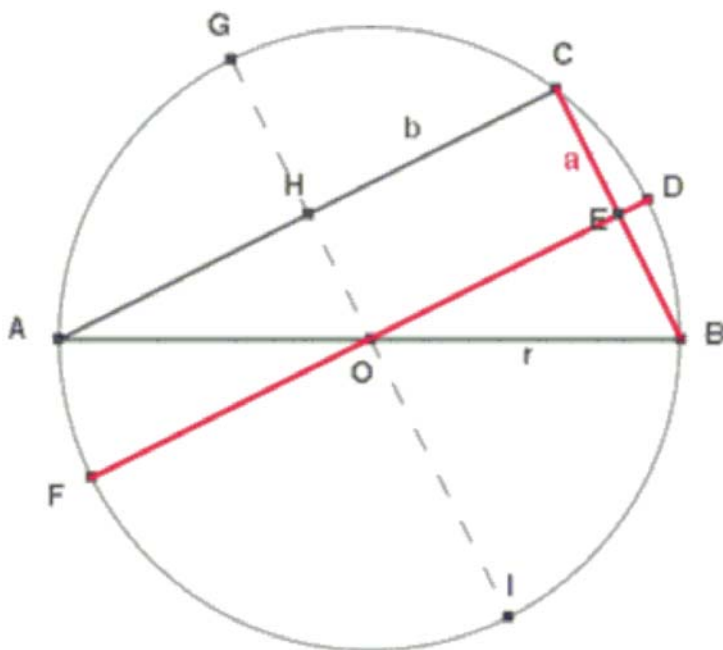
$$\text{also: } ma^2 + mb^2 = mc^2$$

$$\text{bzw. } a^2 + b^2 = c^2$$

4.10. Pythagoras mit Kreisberechnungen

Dem rechtwinkligen Dreieck ABC wird der Umkreis gezeichnet mit dem Radius der halben Hypotenuse aus c, also $r=c/2$.

DF ist nun die rechtwinklige Gerade zu BC und halbiert gleichzeitig BC. E und H sind die Mittelpunkte von BC resp. AC, also kann gleichgesetzt werden: $EO = CH$:



Es werden nun die beiden Sehnen FGD und CDB betrachtet und mit dem Sehnensatz lässt sich sagen:

$$CE \times EB = DE \times EF$$

wird dieselbe Aussage nun mit den Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks, also a, b, c ausgedrückt erhält man:

$$(a/2)^2 = (c/2 - b/2) (c/2 + b/2)$$

$$(a/2)^2 = (c/2)^2 - (b/2)^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad \text{oder} \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Wie schon in der Vorbemerkung erwähnt, beschränkte sich diese Arbeit auf die ausgewählten 10 Beweise für den Satz des Pythagoras, den Höhensatz und den Kathetensatz. Nur schon innerhalb dieser Auswahl findet sich ein breites Spektrum an mathematischem Wissen wieder (Geometrie, Planimetrie, Algebra, etc.) das mit komplexeren Beweisen noch um ein Vielfaches erweitert werden könnte (man denke nur schon an vektorgeometrische Beweise). ‚Pythagoras‘ ist in diesem Sinne ein ständig erweiterbares Thema, das so viele Facetten des mathematischen Wissens abdeckt, dass es für den Schulunterricht nach wie vor nicht wegzudenken ist. Dies zeigt nicht zuletzt, welche Wichtigkeit der Satz des Pythagoras nach über 2600 Jahren nach wie vor hat und welchen Einfluss Pythagoras damit auf die Mathematik hatte. In diesem Sinne ist wohl eine der didaktischen Hauptfunktionen des Pythagoras Unterrichts-Blocks, den SchülerInnen die Komplexität und die Vernetzung eines mathematischen Themas nahe zu legen und sie vor allem darauf aufmerksam zu machen, dass nicht die Lösung eines Problems, sondern vielmehr dessen vielfältige Lösungswege einem ein breiteres, fundierteres Wissen vermittelt.

Bibliographie

Fraedrich, A.M., *Die Satzgruppe des Pythagoras*, in: Knoche, N. und Scheid, H. (Hg.):
Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 29. BI
Wissenschaftsverlag, Mannheim Leipzig Wien Zürich, 1994.

Gehrke, H., *Mathematik in Antike und Orient*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1984.

Hoehn A. & Huber M., *Pythagoras – Erinnern Sie sich? Faszinierendes aus Geometrie, Zahlentheorie und Kulturgeschichte*, Orell Füssli Verlag AG, Zürich 2005.

Maor, Eli: *The Pythagorean Theorem – A 4,000-Year History*, Princeton University
Press, Princeton & Oxford, 2007.

Wipper, Jury: *Sechsvierzig Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes*, aus dem
russischen v. F. Graap, 2. Aufl., Hermann Barsdorf Verlag, Berlin 1911.

Online Quellen:

Pythagorean Theorem [10.10.2008]

<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml>

Satz des Pythagoras [7.10.2008]

http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras

Der Beweis [des Pythagoräischen Satzes] [7.10.2008]

<http://www.asamnet.de/~sigwarts/facharbeit/beweis.htm>